6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 21. 5. 2018.

Úloha 1. Spočtěte v závislosti na $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n.$$

Úloha 2. Najděte

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \min \left\{ |a - b\sqrt{3}| : \ a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a + b = n \right\}.$$

Úloha 3. Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní posloupnost a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$. Dokažte.

Úloha 4. Je dán konvexní mnohoúhelník $A_1 \dots A_n$, ve kterém žádné dvě strany nejsou navzájem rovnoběžné. Označme $A_{n+1} := A_1$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ označme A_{k_i} vrchol nejvzdálenější od přímky $A_i A_{i+1}$ a velikost úhlu $A_i A_{k_i} A_{i+1}$ označme α_i. Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$.

⋆ **Úloha 5.** Operaci k proměnných f na $\{1, \dots, n\}$ nazveme *přátelskou* vůči binární relaci ρ, pokud $f(a_1, \dots, a_k) \rho f(b_1, \dots, b_k)$ implikuje $a_i \rho b_i$ pro nějaké $1 \le i \le k$. Ukažte, že pokud je operace f přátelská vůči relacím "$=$"a "$<$", pak je přátelská vůči všem relacím.

⋆ **Úloha 6.** Ukažte, že mocninná řada

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod_{n \ge 2} \left(1 - x^{F_n}\right) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^8)\cdots \\ &= 1 - x - x^2 + x^4 + x^7 - x^8 + x^{11} - x^{12} - x^{13} + x^{14} + x^{18} + \cdots, \end{aligned}$$

kde F_n jsou Fibonacciho čísla, má koeficienty rovny jen -1, 0, nebo 1.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`