4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 23. 4. 2018.

Úloha 1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Rozhodněte, zda nutně platí některé implikace mezi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} = 0.$$

Úloha 2. Nechť a je liché přirozené číslo. Ukažte, že všechny dělitelé p čísla $a^2 + 2$ splňují $p \equiv 1 \pmod 8$ nebo $p \equiv 3 \pmod 8$.
Hint: Legendreovy symboly.

Úloha 3. Vypočtěte stopu matice $(I + A)(I + 2A) \dots (I + 2018A)$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4. Vypočtěte

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{14})\Gamma(\frac{9}{14})\Gamma(\frac{11}{14})}{\Gamma(\frac{3}{14})\Gamma(\frac{5}{14})\Gamma(\frac{13}{14})},$$

kde Γ je známá gamma funkce definovaná $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

⋆ **Úloha 5.** Je dán orientovaný graf na 99 vrcholech, ve kterém mezi 99 dvojicemi vrcholů existují hrany v obou směrech a mezi zbylými dvojicemi existují hrany v jednom směru. Najděte nejvyšší možný počet silně souvislých indukovaných podgrafů na čtyřech vrcholech (tj. počet čtveřic vrcholů takových, že mezi každými dvěma z nich existují v obou směrech cesty vedoucí jen přes vrcholy této čtveřice).

⋆ **Úloha 6.** Buď F komutativní těleso charakteristiky 0 a $p \in F[x]$ polynom nad F. Označme D_p množinu všech polynomů $q \in F[x]$, které dělí $p \circ s$ pro nějaké $s \in F[x]$. Ukažte, že množina D_p je uzavřená na násobení.

---

web: `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/resitel`