3. soutěžní série

26. 3. 2018

Úloha 1. Diferencovatelné funkce f, $g : (-\infty, 0) \to [0, +\infty)$ splňují $\min(f'(x), g'(x)) \geq f(x)g(x)$. Ukažte, že platí $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ nebo $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. (5 bodů)

Úloha 2. V lineárním prostoru reálných $n \times n$ matic najděte největší možnou dimenzi podprostoru V, aby platilo $\operatorname{tr}(XY) = 0$ pro všechny dvojice X, $Y \in V$ (kde $\operatorname{tr}(A)$ značí stopu matice A). (10 bodů)

Úloha 3. Najděte polynom dvou proměnných $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, aby pro každou dvojici (s, t) nesoudělných celých čísel platilo

$$f(s,t) = \sum_{m=1}^{s-1} \sum_{n=1}^{t-1} |mt - ns|.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2} \geq \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

(10 bodů)