2. soutěžní série – řešení

1. Využitím $n^3 - 1 = (n-1)(n(n+1)+1)$ a $n^3 + 1 = (n+1)((n-1)n+1)$ rozepíšeme součin do členu $n = N$:

$$\prod_{n=2}^{N} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (N-1) \cdot 7 \cdot 13 \cdots (N(N+1)+1)}{3 \cdot 4 \cdots (N+1) \cdot 3 \cdot 7 \cdots ((N-1)N+1)} = \frac{2(N(N+1)+1)}{3N(N+1)}.$$

Limita je $\frac{2}{3}$.

2. Uvažujme 10×10 matici B sestávající ze samých jedniček. Pak AB má na všech místech číslo $\frac{1}{2}$. Pak tedy $A(AB)$ je matice, která má na všech souřadnicích $\frac{1}{4}$ a (dále indukcí) $A(A(A(A(AB)))) = A^5 B$ je matice sestávající z čísel $\frac{1}{32}$. Tedy matice A^5 má v každém řádku součet $\frac{1}{32}$ a součet všech jejích souřadnic je tedy $\frac{10}{32}$.

3. Počet způsobů, jimiž lze zapsat číslo n, označíme $f(n)$ a ukážeme, že platí

$$f(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}(n+2) \right\rfloor. \tag{1}$$

Pro $n = 1$, $n = 2$ máme splněno. Dále ukážeme, že pro $m \geq 1$ platí $f(2m+1) = f(2m)$ a pro $m \geq 2$ máme $f(2m) = f(m) + f(m-1)$.

Stačí si uvědomit, že přičtením jedné jedničky dostaneme ze zápisu čísla $2m$ (který obsahuje 0 nebo 2 jedničky) zápis čísla $2m+1$ (který obsahuje 1 nebo 3 jedničky) a toto přiřazení je bijekce. Zápisy čísla $2m$ neobsahující žádnou jedničku převedeme bijekcí na zápisy čísla m, když každé číslo v zápisu vydělíme dvěma. Zápis čísla $2m$, který obsahuje 2 jedničky převedeme bijekcí na zápis čísla $m-1$ tak, že obě jedničky odebereme a poté všechny zbývající čísla vydělíme dvěma. Rozmyslete si, že se skutečně jedná o bijekce.

Z výše uvedených vztahů plyne indukcí (1): Platí-li (1) pro všechna $n < 2m+1$, pak $f(2m+1) = f(2m) = \left\lfloor \frac{1}{2}(2m+2) \right\rfloor = m+1 = \left\lfloor \frac{1}{2}(2m+1+2) \right\rfloor$ a platí-li (1) pro všechna $n < 2m$, pak $f(2m) = f(m) + f(m-1) = \left\lfloor \frac{1}{2}(m+2) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(m+1) \right\rfloor$ a protože právě jedno z čísel $m+1$, $m+2$ je liché, dostáváme $f(2m) = \frac{1}{2}(m+2) + \frac{1}{2}(m+1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2m+3-1) = m+1 = \lfloor m+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}(2m+2) \right\rfloor$.

4. Uvažujme přímku s racionálním sklonem $(c, d) \in \mathbb{Q}^2$ procházející racionálním řešením (x_0, y_0), která protne elipsu $ax^2 + by^2 = 1$ v dalším bodě. Tento bod je kořenem kvadratické rovnice $a(x_0 + tc)^2 + b(y_0 + td)^2 - 1 = 0$, jejíž koeficienty a kořen $t = 0$ jsou racionální, proto i druhý kořen je racionální. Pro různé sklony nalezneme nekonečně mnoho racionálních řešení.