# 2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 19. 3. 2018.

**Úloha 1.** Uvažujme posloupnost $a_1 = 1$ a pro $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2}.$$

Ukažte, že posloupnost konverguje a najděte její limitu.

**Úloha 2.** Kladná reálná řešení $x^y = y^x$ tvoří přímku $x = y$ a křivku. Ve kterém bodě se protnou?

**Úloha 3.** Ukažte, že pokud funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává racionální vzdálenosti bodů, pak už zachovává vzdálenosti všech dvojic bodů. Najděte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachovávající racionální vzdálenosti, ale ne všechny vzdálenosti.

**Úloha 4.** Buď $A$ nenulová $n \times n$ matice. Pak existuje regulární $n \times n$ matice $B$, která se od $A$ liší na nejvýše $n - 1$ místech. Dokažte.

**Úloha 5.** Je možné rozdělit množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ na nekonečně mnoho nekonečných množin takových, že se každé dvě z nich liší jen o nějakou celočíselnou konstantu?

$\star$ **Úloha 6.** Dva hráči hrají následující hru: Nejprve je náhodně vybráno nějaké číslo z $1, \ldots, 2018$. Oba hráči se střídají v hádání zvoleného čísla. Po každém pokusu se oba dozví, zda je hledané číslo vyšší, menší, nebo bylo uhodnuto. Hráč, který jej uhodne, vyhrává. Rozhodněte, který z hráčů má vyšší šanci zvítězit, pokud oba budou hrát optimálně.