

4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 10. 4. 2017.

Úloha 1. Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ platí implikace: Pokud $11 \mid a^n + b^n$, pak $11 \mid a$ a $11 \mid b$.

Úloha 2. Pro přirozené číslo K , jehož dekadický zápis má n^2 cifer (přičemž první z nich není nula), označme $D(K)$ determinant matice, která vznikne zapsáním cifer po řádcích do matice $n \times n$. Dále označme $f(n)$ součet čísel $D(K)$ přes všechna n^2 -ciferná čísla K . Spočtěte $f(n)$ (v závislosti na n).

Úloha 3. Uvažme tabulku $m \times n$, kde $m \leq n$ jsou kladná sudá čísla. Tuto tabulku chceme vyplnit nepřekrývajícími se (potenciálně natočenými) dominy 1×2 tak, že každá vnitřní dělicí čára v tabulce dělí nějaké domino na půlky. Pro jakou nejmenší tabulku se nám to může povést? (Tabulka o rozměrech $m_1 \times n_1$ je menší než tabulka $m_2 \times n_2$, pokud $m_1 < m_2$, nebo $m_1 = m_2$ a $n_1 < n_2$.)

Úloha 4. Zapište následující číslo ve tvaru $p + \sqrt{q}$, kde p, q jsou racionální:

$$\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \dots}}}$$

Úloha 5. (seriál) Najděte vlastní čísla reálné $n \times n$ matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ($n \geq 3$), kde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } |i - j| = 1, \\ -1 & \text{pokud } |i - j| = n - 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

★ **Úloha 6.** Mějme disjunkční omezené intervaly $A, B \subset \mathbb{R}$ kladných délek. Ukažte, že je lze rozdělit na spočetné systémy navzájem disjunkčních množin

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

tak, aby platilo $A_i = B_i + c_i$, $i \in \mathbb{N}$ pro nějaká $c_i \in \mathbb{R}$.