3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 9. 4. 2018.

Úloha 1. Nechť $\varphi(n)$ je počet přirozených čísel menších než n nesoudělných s n. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho n takových, že $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

Úloha 2. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná funkce na $[a, b]$ taková, že $f(a) = f(b)$ a $f'(a) = f'(b)$. Ukažte, že pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ má rovnice $f''(x) - \lambda(f'(x))^2 = 0$ alespoň jedno řešení v intervalu (a, b).

Úloha 3. Nechť (ne nutně komutativní) okruh R obsahuje dělitel nuly a nechť celkový počet dělitelů nuly je konečný. Ukažte, že R je konečný.

Úloha 4. Nechť P je pravidelný n-úhelník (včetně svého vnitřku). Pro která přirozená $k \in \mathbb{N}$ existuje podmnožina roviny $S_k \subset \mathbb{R}^2$ taková, že nelze otočit a přesunout P tak, aby pokryl S_k, ale lze jej otočit a přesunout tak, aby pokryl libovolnou k-tici bodů v S_k?

$\star$ **Úloha 5.** Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna $x > 0$, $z \in (0, 1)$ rovnost

$$(1 - z)f(x) = f\left(\frac{1 - z}{z} f(xz)\right).$$

$\star$ **Úloha 6.** V rovině je dáno n bodů $P_1, \ldots, P_n$, které neleží všechny na jedné přímce. Pro $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j$ definujme

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ pokud } P_k \text{ leží na přímce } P_iP_j, \\ 0 \text{ pokud } P_k \text{ neleží na přímce } P_iP_j. \end{cases}$$

Ukažte, že vektory $\overline{v}_{ij} = (\delta_{ij1}, \ldots, \delta_{ijn})^T$, $1 \leq i < j \leq n$, generují celý prostor $\mathbb{R}^n$.