

1. soutěžní série

26. 2. 2018

Úloha 1. Najděte všechny 2×2 reálné matice X splňující

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(5 bodů)

Úloha 2. V rovině je dáno 6 bodů. Nechť D je nejdelší a d nejkratší vzdálenost dvojic bodů. Ukažte, že $\frac{D}{d} \geq \sqrt{3}$. (10 bodů)

Úloha 3. Nechť f je spojitě diferencovatelná funkce na intervalu $[0, 1]$ splňující $f(0) = 0$ a $f'(x) \in (0, 1]$ pro $x \in [0, 1]$. Dokažte, že

$$\left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) \, dx.$$

Kdy nastane rovnost?

(10 bodů)

Úloha 4. Nechť $a \geq 3$ je reálné číslo a P je reálný polynom stupně n . Ukažte, že

$$\max_{i=0,1,\dots,n+1} |a^i - P(i)| \geq 1.$$

(15 bodů)