

1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 5. 3. 2018.

Úloha 1. Spočtete $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ pro

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Úloha 2. Najděte největší možnou hodnotu součinu po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je 2018.

Úloha 3. Najděte všechny spojitě funkce $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňující

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(a)}{f(b)} \geq \frac{f(c)}{f(d)}$$

pro všechna $a, b, c, d \in (0, +\infty)$.

Úloha 4. Existuje nekonečná množina regulárních symetrických matic \mathcal{M} taková, že pro všechny $A, B \in \mathcal{M}$, $A \neq B$ platí $AB^2 = B^2A$, ale $AB \neq BA$?

Úloha 5. Nechť S je množina n bodů v rovině a žádné čtyři z nich neleží na stejné přímce. Nechť $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ je množina všech vzdáleností mezi dvojicemi různých bodů z S a nechť m_i značí násobnost d_i (tj. počet neuspořádaných dvojic $(A, B) \in S^2$ splňujících $|AB| = d_i$). Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^k m_i^2 \leq n^3 - n^2.$$

★ **Úloha 6.** Označme poslední nenulovou číslici $n!$ jako $f(n)$. Dokažte, že pro navzájem různá $a_i \geq 0$ závisí $f(5^{a_1} + 5^{a_2} + \dots + 5^{a_r})$ jen na $a_1 + \dots + a_r = a$. Označme tuto hodnotu $g(a)$. Je g periodická? Pokud ano, jakou má nejkratší periodu?