70. ročník Matematické olympiády – 2020/2021

Úlohy ústředního kola kategorie P – 2. soutěžní den

Na řešení úloh máte 5 hodin čistého času.

Řešením každé úlohy je zdrojový kód programu zapsaný v programovacím jazyce Pascal, C, C++, Python nebo Java. Řešení odevzdáváte pomocí soutěžního systému CMS, který ho automaticky otestuje na připravených sadách testovacích dat. Detaily hodnocení naleznete v pravidlech soutěže. Podrobnější informace o testovacích datech najdete na konci zadání každé úlohy.

P-III-4 Stolní tenis

„Šebestová, jsem ve stolním tenisu lepší než ty!“

„To tak, Pažoute, vždyť jsme spolu během tělocviku hráli a porazila jsem tě.“

„Ale já zase porazil Macha a ten přece porazil tebe, takže tůdle!“

Soutěžní úloha

Žáci 3. B během hodiny tělocviku odehráli několik zápasů ve stolním tenisu. Po skončení hodiny se během oběda někteří žáci vytahovali, že jsou lepší než jiní. Konkrétně je ve třídě n žáků a máme zadáno m dvojic žáků, přičemž pro každou dvojici u, v víme, že u se chlubí, že je lepší než v. To znamená, že existuje nějaká posloupnost žáků $u = w_1, w_2, \ldots, w_t = v$ taková, že během tělocviku $u = w_1$ porazil žáka w_2, který zase porazil žáka w_3, ten porazil w_4 a tak dále až k žákovi w_{t-1}, který porazil žáka $w_t = v$. Kolik nejméně zápasů se mohlo během tělocviku odehrát? Dva žáci spolu mohli odehrát více než jeden zápas.

Formát vstupu

Na prvním řádku dostanete dvě přirozená čísla n a m. Na každém z následujících m řádků jsou vždy dvě přirozená čísla u a v, přičemž $1 \leq u, v \leq n$ a $u \neq v$. Ta znamenají, že žák u se chlubí, že je lepší než žák v.

Můžete předpokládat, že každá dvojice žáků $\{u, v\}$ se na vstupu vyskytne nejvýše jednou v pořadí u, v a nejvýše jednou v pořadí v, u.

Formát výstupu

Na výstup vypište jediné číslo, a to nejmenší počet zápasů, které spolu žáci mohli odehrát tak, aby pro všech m dvojic u, v platilo, že se u může chlubit, že je lepší než v.

Příklady

Vstup:	*Výstup:*

`3 3`
`1 2`
`2 1`
`3 2`
	`3`

Situace ze zadání mohla nastat třeba po tom, co žák 1 hrál se žákem 2 dva zápasy, z nichž jeden vyhrál a jeden prohrál, a dále žák 3 vyhrál nad žákem 2. Jiné řešení používající tři zápasy dostaneme, jestliže žák 3 ve třetím zápase vyhraje nad žákem 1. To proto, že 1 vyhrál nad 2, takže se žák 3 stále může chlubit, že je lepší než 2. Odehrání libovolných dvou zápasů by nestačilo.

Vstup:	*Výstup:*

`4 4`
`1 2`
`2 1`
`3 2`
`1 3`
	`3`

I v tomto případě stačí odehrát tři zápasy. Mohlo se stát, že žák 1 vyhrál nad žákem 3, ten vyhrál nad žákem 2 a ten vyhrál nad žákem 1. Žák 1 se může chlubit, že je lepší než žák 2, protože vyhrál nad žákem 3, který vyhrál nad žákem 2. Povšimněte si, že žák 4 se chlubení vůbec neúčastní.

Bodování

V každém vstupu platí $n \geq 1$ a $m \geq 0$. Ve vstupech za tři body bude platit $n \leq 5$ a $m \leq 20$, ve všech ostatních vstupech bude platit $n \leq 10^6$ a $m \leq 10^6$, některé z nich budou navíc splňovat jednu ze dvou podmínek:

- Kdykoli vstup obsahuje dvojici u, v, tak také obsahuje dvojici v, u. Za takové vstupy bude možné získat 2 body.
- Pro každé dva žáky u, v platí, že existuje alespoň jedna posloupnost žáků $u = w_1, w_2, \ldots, w_t = v$ taková, že pro všechna $1 \leq i \leq t-1$ vstup obsahuje buď dvojici w_i, w_{i+1}, nebo dvojici w_{i+1}, w_i. Jinak řečeno, po zapomenutí orientací hran je graf souvislý, to se také nazývá *slabá souvislost*. Za takové vstupy bude také možné získat 2 body.

Následující tabulka shrnuje horní meze v jednotlivých sadách vstupů a kolik bodů můžete získat za jejich vyřešení:

body	n	m	*poznámka*
3	5	20	
2	10^6	10^6	Pokud u, v, tak i v, u.
2	10^6	10^6	Graf je slabě souvislý.
3	10^6	10^6	

P-III-5 Elektrárny

Obyvatelé Pokrokostánu se rozhodli zavést do svých měst elektrický proud. V Pokrokostánu je n měst a v každém z nich se dá vybudovat elektrárna – v i-tém z nich stojí vybudování elektrárny a_i milionů korun. První plán na elektrifikaci Pokrokostánu byl, že se v každém městě postaví jedna elektrárna. Úředníci si ale brzy uvědomili, že mohou ušetřit, pokud do některých měst bude elektřina zavedena z jiného města. Speciálně si vytipovali m dvojic měst, přičemž pro dvojici i, j můžeme daná města propojit za cenu $b_{i,j}$ milionů korun. Aby město bylo elektrifikováno, stačí, aby bylo spojeno posloupností spojů s nějakým jiným, ve kterém je vybudována elektrárna. Za jakou nejmenší cenu můžeme elektrifikovat všechna města v Pokrokostánu?

Soutěžní úloha

Na vstupu pro každé pokrokostánské město dostanete cenu a_i, za kterou v něm můžeme vybudovat elektrárnu. Dále dostanete m dvojic měst a pro každou z nich dostanete cenu $b_{i,j}$, za kterou můžeme daná města i a j propojit. Vypište nejmenší cenu, za kterou se dají v některých městech vybudovat elektrárny a některé dvojice měst propojit tak, aby v každém městě i buď byla postavena elektrárna nebo pro něj platilo následující: existuje posloupnost měst $i = i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ taková, že jsou propojeny dvojice i_1 a i_2, dále i_2 a i_3, …, $i_{\ell-1}$ a i_ℓ a ve městě i_ℓ je vybudována elektrárna.

Formát vstupu

Na prvním řádku dostanete dvě mezerou oddělená přirozená čísla n a m. Na druhém řádku dostanete n mezerou oddělených přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – ceny, za které v daném městě vybudujeme elektrárnu. Platí $1 \leq a_i \leq 10^6$. Na každém z m následujících řádků dostanete vždy tři mezerou oddělená přirozená čísla i, j, $b_{i,j}$ – ceny, za které propojíme města i a j. Platí $1 \leq i, j \leq n$ a $1 \leq b_{i,j} \leq 10^6$. Můžete předpokládat, že $i \neq j$ a že každou dvojici $\{i, j\}$ dostanete nejvýše jednou.

Formát výstupu

Na výstup vypište jediné přirozené číslo – cenu, za kterou můžeme elektrifikovat všechna města v Pokrokostánu. Pozor, výsledek se nemusí vejít do standardního 32-bitového datového typu *int*.

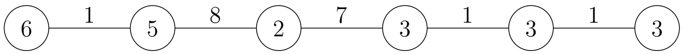
Příklady

Vstup:

```
6 5
6 5 2 3 3 3
1 2 1
2 3 8
3 4 7
4 5 1
5 6 1
```

Výstup:

```
13
```



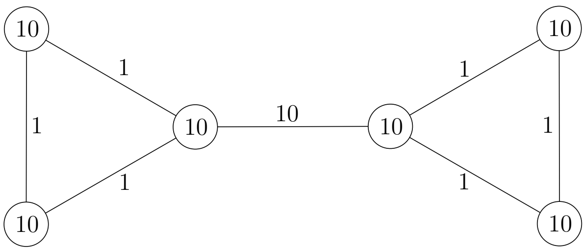
Vstup je znázorněn na obrázku, přičemž kolečka znázorňují města a čísla odpovídají ceně stavby elektrárny resp. propojení. Jedním správným řešením je vybudovat elektrárnu v městech 2, 3 a 6. Elektrárna ve městě 2 bude zásobit i město 1, zatímco elektrárna ve městě 6 bude zásobit města 4 a 5. Celková cena elektráren je $5 + 2 + 3 = 10$ *a celková cena propojení je* $1 + 1 + 1 = 3$*. Zaplatíme tedy celkem 13 milionů. Povšimněte si, že poslední elektrárnu můžeme postavit i ve městě 4, nebo 5. Necháme-li propojení měst stejné, budou mít i tato řešení cenu 13 milionů.*

Vstup:

```
6 7
10 10 10 10 10 10
1 2 1
2 3 1
1 3 1
4 5 1
5 6 1
4 6 1
1 4 10
```

Výstup:

```
24
```



Jedním správným řešením je postavit jednu elektrárnu pro města $1, 2, 3$ *v libovolném z nich a druhou pro města* $4, 5, 6$ *opět v libovolném z nich. Celková cena je pak 24 milionů, neboť musíme dále propojit 4 dvojice měst (např. 1 a 2, 2 a 3, 4 a 5, 5 a 6), každou za 1 milion. Jiným správným řešením je postavit pouze jednu elektrárnu v libovolném městě a kromě zmíněných 4 dvojic ještě propojit města 1 a 4.*

Vstup:

```
2 0
5 3
```

Výstup:

```
8
```

V tomto případě není možné zadaná města propojit, jediná možnost je postavit elektrárnu v obou z nich.

Bodování

Vstupní data jsou rozdělena do tří částí. Ve všech testovacích sadách platí $1 \leq n \leq 10^5$ a $0 \leq m \leq 3 \cdot 10^5$. Dále:

- *3 body* – platí $m = n - 1$ a i-tá dvojice měst, jež můžeme propojit, je dvojice $i, i+1$. Jinými slovy, vstupní graf je tzv. cesta.
- *3 body* – platí, že cena libovolné elektrárny je větší než cena libovolného propojení dvou měst, tedy očíslujeme-li ceny elektráren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a ceny propojení $b_1, b_2, \ldots, b_m$, platí $\min_{1 \leq i \leq n} a_i > \max_{1 \leq j \leq m} b_j$.
- *4 body* – bez dalších omezení.

P-III-6 Země živitelka

Země živitelka je největší a nejvýznamnější veletrh zemědělství v ČR. Letos tam bude celých n výstavních stánků, a aby se zamezilo hromadění lidí, zavedli organizátoři dvě opatření:

- Vstup je povolen jen každou celou minutu (tj. dveře jsou otevřené ve 12:00:00, 12:01:00, atd.) a celkem se dveře otevřou m-krát. Po vstupu se člověk ocitne rovnou u stánku 1.
- Stánky se musí procházet popořadě (tj. 1, 2, ..., n), u každého se člověk musí zdržet přesně jednu minutu, a výstavu může opustit až po navštívení posledního stánku.

Řečeno formálněji: očíslujeme minuty s otevřenými dveřmi 1 až m, 12:00 je tedy minuta 1, 12:01 je minuta 2 a tak dále. Řekněme, že člověk vejde na veletrh v x-té minutě. Bude v pak u stánku 1 v x-té minutě, u stánku 2 v $(x+1)$-té minutě a tak dále.

Pokud přijde člověk ke stánku, u kterého zrovna stojí i jeho majitel, dostane nějaký malý dárkový předmět. Pavel miluje dárkové předměty, a tak by jich chtěl získat co nejvíc. Naštěstí se mu podařilo zjistit rozvrh toho, kdy u kterého stánku jeho majitel bude. Má k dispozici seznam celkem k trojic tvaru (s, o, d) říkajících, že u s-tého stánku bude jeho majitel od minuty o do minuty d včetně.

V rozvrhu může být i víc trojic se stejným s, tzn. může se stát, že majitel od stánku odejde a zase se vrátí. Nestane se ale, že by v rozvrhu byly pro jedno s dvě trojice určující protínající se intervaly. Formálně, pokud je v rozvrhu trojice (s, o, d) a trojice (s, o', d'), bude platit $d < o'$ nebo $d' < o$.

Kolik nejvíc dárkových předmětů může Pavel získat, když si správně načasuje příchod na veletrh?

Formát vstupu

Na prvním řádku dostanete tři přirozená čísla, n, m a k. Na každém z k dalších řádků dostanete tři čísla s_i, o_i a d_i značící, že majitel s_i-tého stánku bude přítomen od minuty o_i do minuty d_i včetně. Minuty číslujeme od 1 do m podobně jako výše.

Formát výstupu

Na vstup vypište nejvyšší počet dárkových předmětů, který může Pavel získat.

Příklady

Vstup:	*Výstup:*

`4 8 4`
`1 2 4`
`2 4 8`
`4 8 9`
`1 6 7`
	`3`

Tři dárkové předměty může Pavel získat, když vejde v minutě 6*. Dárek tak dostane ve stánku 1 (minuta* 6*), stánku 2 (minuta* 7*) a stánku 4 (minuta* 9*). Všimněte si, že se může stát, že u některých stánků se majitel neobjeví vůbec, jako zde u stánku 3.*

Bodování

Ve všech vstupech platí $1 \leq n, m, k$ a $1 \leq o_i \leq d_i \leq n + m$. Následující tabulka shrnuje horní meze v jednotlivých sadách vstupů a kolik bodů můžete získat za jejich vyřešení:

body	n	m	k
2	10	10	10
2	10^5	10^5	10
3	10^5	10^5	10^5
3	10^5	10^9	10^5