69. ročník Matematické olympiády – 2019/2020

Úlohy ústředního kola kategorie P – 2. soutěžní den

Na řešení úloh máte 5 hodin čistého času.

Řešením každé úlohy je zdrojový kód programu zapsaný v programovacím jazyce Pascal, C, C++, Java nebo Python. Řešení odevzdáváte pomocí soutěžního systému CMS, který ho automaticky otestuje na připravených sadách testovacích dat. Detaily hodnocení naleznete v pravidlech soutěže. Podrobnější informace o testovacích datech najdete na konci zadání každé úlohy.

P-III-4 Rekonstrukce dvou map

Cestovatel Parko Molo nedávno navštívil jedno ostrovní království tvořené n stejně vypadajícími ostrovy. Některé dvojice ostrovů byly propojeny mosty, a to tak, že po mostech bylo možné dojet z libovolného ostrova na libovolný jiný ostrov právě jedním způsobem. (Mostů tedy bylo přesně $n-1$ a odborně říkáme, že království mělo stromovou topologii.)

Když už Parko z království odcestoval, uvědomil si, že úplně zapomněl nakreslit si jeho mapu. Ve svém notesu našel jenom seznam, kam si zapsal, kolik mostů vedlo ze kterého ostrova. Ale ani správnosti tohoto seznamu úplně nedůvěřuje.

Soutěžní úloha

Jsou dána čísla $d_1, \ldots, d_n$. Zjistěte, zda existuje ostrovní království výše popsaných vlastností, jehož ostrovy je možné očíslovat od 1 do n tak, aby pro každé i platilo, že z ostrova i vede přesně d_i mostů. Jestliže takové království existuje, zjistěte také, zda je jeho mapa jednoznačně určena. Pokud ano, sestrojte ji, pokud ne, sestrojte dvě různé mapy odpovídající zadání.

Pozor: Dvě mapy považujeme za stejné, pokud lze ostrovy na jedné z nich přečíslovat tak, aby z ní vznikla druhá mapa.

Formát vstupu

Na prvním řádku vstupu je uveden typ vstupu t. Jestliže $t = 1$, úkolem je pouze zjistit, kolik různých map odpovídá zadanému popisu (0 / 1 / alespoň 2). Jestliže $t = 2$, je třeba takové mapy také sestrojit.

Na druhém řádku vstupu je kladné celé číslo n. Na třetím jsou mezerami oddělená kladná celá čísla $d_1, \ldots, d_n$.

Formát výstupu

První řádek výstupu bude obsahovat číslo k: počet map odpovídajících vstupu. Přesněji, k má být rovno 0, pokud neexistuje žádná mapa odpovídající vstupu, k má být rovno 1, pokud jsou všechny možné mapy stejné, k má být rovno 2, pokud existují alespoň dvě principiálně různé mapy.

Pro $t = 1$ může být zbytek výstupu libovolný. Pro $t = 2$ musí zbytek výstupu obsahovat postupně popisy k různých map odpovídajících vstupu. Popis mapy tvoří

$n-1$ řádků, na každém z nich jsou dvě čísla z rozsahu 1 až n: čísla dvou ostrovů spojených mostem.

Připomínáme, že mapa musí být taková, aby se z každého ostrova dalo po mostech dostat na libovolný jiný ostrov. Navíc musí pro každé i platit, že z ostrova i vede přesně d_i mostů.

Omezení a hodnocení

Váš program bude testován na 10 sadách vstupů, za každou správně vyřešenou vstupní sadu dostanete jeden bod.

Ve všech vstupech platí $t \in \{1, 2\}$, $2 \leq n \leq 10^6$ a $\forall i : 1 \leq d_i \leq n-1$.

V prvních pěti sadách je $t = 1$ a postupně platí $n \leq 5$, $n \leq 100$, $n \leq 5000$, $n \leq 10^5$ a $n \leq 10^6$.

Druhých pět sad je identických s prvními pěti, až na to, že je v nich $t = 2$.

V sadách 2, 4, 7 a 9 jsou použity pouze vstupy, pro které existuje nejvýše jedna mapa.

Příklady

Vstup:	*Výstup:*

`2`
`4`
`1 1 1 1`
	`0`

Tento vstup je příklad 1 v testovači. Žádná jemu odpovídající mapa neexistuje.

Vstup:	*Výstup:*

`2`
`6`
`1 3 1 1 3 1`
	`1`
	`2 1`
	`2 3`
	`5 4`
	`6 5`
	`2 5`

Toto je příklad 2. Všechny mapy, které mu odpovídají, jsou stejné.

Příklad 3 je stejný jako ten předchozí, jenom má $t = 1$. Pro něj stačí vypsat jeden řádek s číslem 1.

Vstup:	*Výstup:*

`2`
`8`
`4 3 2 1 1 1 1 1`
	`2`
	`...`

Toto je příklad 4. Namísto teček mají být ve výstupu uvedeny postupně popisy dvou různých map. Ty zde v zadání úmyslně neuvádíme, ale když odevzdáte řešení této úlohy, dozvíte se, zda dává pro tento vstup správný výstup, a pokud ne, v čem je problém.

P-III-5 Věže

Máme obrovskou šachovnici o rozměrech $d \times d$. Řádky a sloupce šachovnice jsou označeny čísly od 0 do $d-1$. Na šachovnici je rozmístěno n věží, některé jsou bílé, ostatní černé.

Šachová věž se může v jednom tahu posunout na šachovnici buď vodorovně, nebo svisle. Může přitom přejít přes libovolný počet políček, všechna tato políčka musí být prázdná. Políčko, na kterém věž dokončí svůj pohyb, musí být buď prázdné, nebo musí obsahovat figuru opačné barvy (ta je v takovém případě odstraněna z šachovnice). Věž ohrožuje všechna políčka, na která se může přesunout jedním tahem.

Soutěžní úloha

Představte si, že jsme na každé prázdné políčko šachovnice napsali dvě čísla: nejprve počet bílých a potom počet černých věží, které toto políčko ohrožují. Tuto dvojici čísel nazveme *typ políčka.*

Pro každý typ políčka zjistěte, kolik takových políček na naší šachovnici existuje.

Formát vstupu a výstupu

Na prvním řádku vstupu jsou zadána čísla d a n. Každý ze zbývajících n řádků popisuje jednu věž ve tvaru „řádek sloupec barva“, kde barva je `B` pro bílou a `C` pro černou věž. Je zaručeno, že věže stojí na různých políčkách.

Na výstup vypište několik řádků ve tvaru „b c p“, kde b je počet bílých věží ohrožujících políčko, c je počet černých věží ohrožujících políčko a p je počet volných políček tohoto typu. Vypisujte jen takové trojice (b, c, p), pro které $p > 0$. Řádky výstupu musí být uspořádány primárně podle b a sekundárně podle c.

Omezení a hodnocení

Váš program bude testován na 10 sadách vstupů, za každou správně vyřešenou vstupní sadu dostanete jeden bod.

Ve všech vstupech platí $1 \leq d \leq 10^9$, $0 \leq n \leq 200\,000$ a $n < d^2$.

Dodatečné horní hranice pro d a n v jednotlivých sadách jsou uvedeny v následující tabulce.

V sadách označených písmenem R jsou všechny věže umístěny v navzájem různých řádcích a sloupcích.

V sadách označených písmenem B jsou všechny věže bílé.

sada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	8	20	50	10^6	10^6	10^6	10^6	10^9	10^9	10^9
n				10^2	10^2	60 000			60 000	
typ	B	R		B		B		R	B	

Příklady

Vstup:
```
8 1
4 7 B
```

Výstup:
```
0 0 49
1 0 14
```

Jedna bílá věž: 49 políček není ohroženo vůbec, 14 je ohroženo jednou bílou a žádnou černou věží.

Vstup:
```
100002 4
11 11 C
0 11 C
0 0 C
11 0 C
```

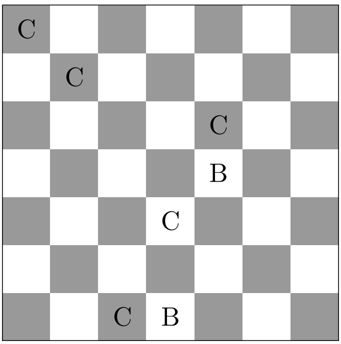
Výstup:
```
0 0 10000000000
0 1 399960
0 2 40
```

Čtyři černé věže v rozích malého čtverce na velké šachovnici.

Vstup:
```
7 7
0 0 C
6 2 C
1 1 C
3 4 B
4 3 C
2 4 C
6 3 B
```

Výstup:
```
0 0 2
0 1 11
0 2 17
1 0 5
1 1 6
2 0 1
```

Vstup vypadá takto:



P-III-6 Cestou na trh

Tina nedávno narazila na následující aritmetickou úlohu: *„Na trh šlo deset žen, každá měla deset pytlů. V každém pytli jsou tři kočky a s každou z nich sedm koťat. Zjistěte, kolik šlo na trh všeho dohromady."*

Pro Tinu bylo samozřejmě snadné spočítat, že na trh šlo 10 žen, 100 pytlů, 300 koček a 2100 koťat, všeho dohromady tedy bylo 2510.

Zaujala ji ale opačná otázka: pro které výsledky lze takovouto úlohu zformulovat a jak bude vypadat?

Soutěžní úloha

Je dáno číslo n: počet všeho dohromady, co šlo na trh. Sestavte jednu možnost, kolik bylo čeho, za následujících předpokladů:

- Všechny počty musí být větší nebo rovné 2.
- Pokud existuje více různých řešení, chceme určit takové, v němž je co nejvíce *různých typů objektů.* (V ukázkové úloze jsou čtyři typy objektů: ženy, pytle, kočky a koťata.)

Formát vstupu a výstupu

Vstup je tvořen jediným řádkem s jedním číslem n ($2 \leq n \leq 10^{12}$).

První řádek výstupu bude obsahovat číslo t ($t \geq 1$): největší možný počet typů objektů. Druhý řádek výstupu bude obsahovat t mezerami oddělených čísel: celkový počet objektů tohoto typu pro každý typ objektu, a to v pořadí, v němž jsou jednotlivé typy objektů uvedeny v zadání úlohy.

Omezení a hodnocení

Váš program bude testován na 10 sadách vstupů, za každou správně vyřešenou vstupní sadu dostanete jeden bod.

V jednotlivých sadách maximální hodnota n nepřekročí 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^6, 10^7, 10^9, $5 \cdot 10^{10}$, $3 \cdot 10^{11}$ a 10^{12}.

Příklady

Vstup:
```
12
```

Výstup:
```
2
2 10
```

Dvě ženy, každá měla pět pytlů.

Existují ještě dvě jiná optimální řešení: „tři pštrosi, každý má tři antény“ a „čtyři žáby, každá se dvěma pulci“.

Vstup:
```
27
```

Výstup:
```
3
3 6 18
```

Tři velbloudi, každý má dva hrby, na každém hrbu tři deky.

Vstup:
```
11
```

Výstup:
```
1
11
```

Jedenáct fotbalistů.