68. ročník Matematické olympiády – 2018/2019

Úlohy ústředního kola kategorie P – 2. soutěžní den

Na řešení úloh máte 4,5 hodiny čistého času. Při soutěži je zakázáno používat jakékoliv pomůcky kromě psacích potřeb a přiděleného počítače (tzn. knihy, kalkulačky, mobily, apod.).

Řešením každého příkladu je zdrojový kód programu zapsaný v programovacím jazyce Pascal, C nebo C++. Řešení odevzdáváte pomocí soutěžního systému CMS, který ho automaticky otestuje na připravených sadách testovacích dat. Detaily hodnocení naleznete v letáku s popisem prostředí. Podrobnější informace o testovacích datech najdete na konci zadání každé úlohy.

P-III-4 Výlet

Vylétáme na galaktický výlet! Některé dvojice hvězd v galaxii jsou propojeny obousměrnými červími dírami, kterými se dá dostat z jedné hvězdy na druhou přesně za hodinu. Náš výlet může začít kdekoliv chceme (dopraví nás tam transgalaktický teleport), ale musí skončit tam kde jsme začali. Na výlet máme pouze 4 hodiny a rádi bychom stihli navštívit 4 různé hvězdy. Podaří se nám to?

Soutěžní úloha

Máte dánu mapu červích děr v galaxii. Rozhodněte, zda existuje čtveřice navzájem různých hvězd $h_1, \ldots, h_4$ taková, že hvězdy h_1 a h_2, h_2 a h_3, h_3 a h_4, h_1 a h_4 jsou spojeny červími děrami.

Formát vstupu

Na prvním řádku jsou dvě přirozená čísla n a m ($1 \leq n \leq 10\,000$, $0 \leq m \leq 350\,000$) udávající počet hvězd a počet červích děr. Hvězdy jsou číslovány od 1 do n. Na každém z dalších m řádků je dvojice čísel a a b ($1 \leq a < b \leq n$) udávající, že mezi hvězdami a a b vede červí díra. Mezi každými dvěma hvězdami vede nejvýše jedna červí díra.

Formát výstupu

Vypište 4 navzájem různá přirozená čísla $h_1, \ldots, h_4$ oddělená mezerami taková, že hvězdy h_1 a h_2, h_2 a h_3, h_3 a h_4, h_1 a h_4 jsou spojeny červími děrami. Jestliže taková čísla neexistují, vypište místo toho číslo 0.

Příklad

Vstup:
```
4 5
1 2
1 3
1 4
2 4
3 4
```

Výstup:
```
1 2 4 3
```

Jsou i jiné správné odpovědi, například 2 4 3 1 či 3 4 2 1.

Vstup:	*Výstup:*

`4 4`
`1 2`
`1 3`
`1 4`
`2 4`
	`0`

Bodování

Váš program bude testován na 10 sadách vstupů, za každou správně vyřešenou dostanete 1 bod. V jednotlivých sadách platí následující omezení:

testovací sady	*omezení*
1	$n \le 20$
2, 3	$n \le 100$, $m \le 200$
4, 5	$n \le 1\,000$, $m \le 5\,000$
6, 7	$n \le 5\,000$, $m \le 110\,000$
8, 9, 10	$n \le 10\,000$, $m \le 350\,000$

P-III-5 Důl

V úzké chodbě v dolu pracuje skupina horníků. Chodba je natolik úzká, že se v ní dva horníci nevyhnou, a proto vždy může odejít pouze ten horník, který přišel jako poslední. Ráno i večer je chodba prázdná a víme, že žádný horník nepracoval víc než m minut. Z fotobuňky u vchodu víme, ve kterých časech někdo vchodem prošel. Nevíme ale, kdo vchodem prošel, ani to, zda vcházel dovnitř nebo vycházel ven. Zajímá nás, kolika způsoby mohla popsaná situace nastat. Různí horníci jsou navzájem nerozlišitelní, dva způsoby se tedy liší pouze tehdy, pokud v jednom z nich v nějaký čas horník vycházel ven, zatímco v tom druhém ve stejný čas nějaký horník vcházel dovnitř.

Soutěžní úloha

Máte zadánu posloupnost časů (v minutách od rána), ve kterých někdo do chodby přišel či odešel. Určete, kolika různými způsoby jde k těmto časům přiřadit příchody a odchody tak, aby byly splněny výše popsané podmínky. Vypište zbytek po dělení počtu těchto způsobů číslem 1 000 003.

Formát vstupu

Na prvním řádku jsou dvě přirozená čísla n a m, kde $1 \le n \le 2\,000$ a $1 \le m \le 1\,000\,000$; číslo n udává počet horníků a číslo m horní mez na délku práce každého z nich. Na i-tém z $2n$ následujících řádků je jedno přirozené číslo a_i udávající čas v minutách od rána, kdy někdo přišel či odešel; platí $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n} \le 1\,000\,000$.

Formát výstupu

Vypište jedno celé číslo: počet možných způsobů, jak přidělit časům příchody či odchody dle podmínek zadání, modulo 1 000 003.

Příklad

Vstup:	*Výstup:*

`3 6`
`1`
`2`
`3`
`7`
`9`
`10`
	`2`

Jsou následující možnosti. Jelikož je chodba na začátku prázdná, v čase 1 musí horník přijít; označme si tohoto horníka A.

- *Pokud horník A v čase 2 odejde, ze stejného důvodu v čase 3 musí nějaký horník B přijít. Jelikož horník B stráví v chodbě nejvýše 6 minut, nemůže odejít v čase 10, musí tedy odejít v čase 7. V čase 9 pak přijde další horník a v čase 10 odejde.*
- *Horník A může odejít v čase 7, kdy v chodbě strávil přesně 6 minut. Další horník pak přijde v čase 2 a odejde v čase 3, a další přijde v čase 9 a v čase 10 odejde.*

Horník A nemůže odejít v čase 3, jelikož v čase 2 by nějaký další horník přišel a zablokoval by mu chodbu.

Bodování

Váš program bude testován na 10 sadách vstupů, za každou správně vyřešenou dostanete 1 bod. V jednotlivých sadách platí následující omezení:

testovací sady	*omezení*
1	$n \leq 10$
2	$n \leq 200$, $m = 1\,000\,000$
3	$n \leq 2\,000$, $m = 1\,000\,000$
4, 5, 6	$n \leq 200$
7, 8, 9, 10	$n \leq 2\,000$

P-III-6 Wienerův index

Alkan je uhlovodík, v němž jsou atomy uhlíku spojeny pouze jednoduchými vazbami a netvoří cykly. Vzdálenost mezi dvěma atomy uhlíku v alkanu je počet vazeb, které musíme projít, abychom se dostali z jednoho z nich do druhého (uvažujeme pouze souvislé molekuly, z každého atomu uhlíku se tedy do každého jiného dá dostat právě jedním způsobem). Wienerův index alkanu je roven součtu vzdáleností mezi všemi dvojicemi uhlíkových atomů.

Soutěžní úloha

Pro zadaný alkan určete jeho Wienerův index a vypište zbytek po dělení tohoto indexu číslem 1 000 003.

Poznámka: reálné alkany splňují různá fyzikální omezení (s každým atomem uhlíku sousedí pouze 4 vazby, počet atomů uhlíku v daném objemu je omezený, …). Pro tuto úlohu tato omezení neuvažujeme, požadujeme pouze, aby se z každého atomu uhlíku dalo do každého jiného dostat po vazbách právě jedním způsobem.

Formát vstupu

Na prvním řádku je jedno přirozené číslo n, kde $2 \leq n \leq 1\,000\,000$, udávající počet atomů uhlíku v alkanu. Atomy jsou očíslovány od 1 do n. Na i-tém z $n-1$ následujících řádků je jedno celé číslo s_i (kde $1 \leq s_i \leq i$) udávající, že v alkanu je vazba mezi atomy číslo s_i a $(i+1)$.

Formát výstupu

Vypište jedno celé číslo udávající Wienerův index zadaného alkanu modulo 1 000 003.

Příklad

Vstup:
```
5
1
2
3
2
```

Výstup:
```
18
```

Vzdálenosti z atomu 1 do atomů 2, …, 5 jsou 1, 2, 3, 2, z atomu 2 do atomů 3, 4, 5 jsou 1, 2, 1, z atomu 3 do atomů 4, 5 jsou 1, 2, a z atomu 4 do atomu 5 je 3, Wienerův index je roven součtu těchto čísel.

Bodování

Váš program bude testován na 10 sadách vstupů, za každou správně vyřešenou dostanete 1 bod. V jednotlivých sadách platí následující omezení:

testovací sady	*omezení*
1	$n \leq 100$ a alkan se nevětví, tj. každý atom je vazbou spojen s nejvýše dvěma dalšími atomy
2	$n \leq 1\,000\,000$ a alkan se nevětví, tj. každý atom je vazbou spojen s nejvýše dvěma dalšími atomy
3	$n \leq 1\,000\,000$ a právě jeden atom je vazbou spojen s více než dvěma dalšími atomy
4, 5	$n \leq 100$
6, 7	$n \leq 2\,000$
8, 9, 10	$n \leq 1\,000\,000$