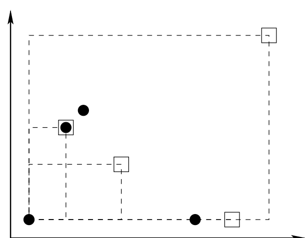
P-III-1 Příšery

Nejdříve zkusme vymyslet řešení „na jistotu“. Pro každou dvojici (naše příšera, příšera počítače) umíme říci, zda při tomto přiřazení naše příšera vyhraje souboj. Vstup tedy můžeme převést na bipartitní graf (jednu partitu tvoří naše příšery, druhou soupeřovy, hrany spojují ty dvojice, ve kterých naše příšera vyhrává). Úkolem je nalézt v tomto grafu maximální párování. Na to existují obecné algoritmy, které by nám daly řešení s časovou složitostí $O(N^{2.5})$. Zkusme najít lepší.

Začneme tím, že si všimneme, že příšera A/B dokáže vyhrát souboj s těmi příšerami X/Y, které mají $1 \le X \le B$ a $1 \le Y < A$. Vstup si tedy můžeme znázornit následovně: Každou příšeru počítače s parametry X/Y vyznačíme jako bod $[X, Y]$, každou naši příšeru vyznačíme jako obdélník s rohy $[1, 1]$ a $[B, A-1]$. Úkolem nyní je co nejvíce bodům přiřadit některý z obdélníků, které daný bod obsahují. (Samozřejmě jeden obdélník můžeme přiřadit jen jednomu bodu.)



Na obrázku je znázorněna následující situace: Příšery počítače (kroužky) jsou zleva doprava 1/1, 3/6, 4/7, 10/1. Hráčovy příšery (obdélníky) jsou 7/3, 5/6, 2/12, 13/14; pravé horní rohy jsou vyznačeny čtverečkem.

Podívejme se na ten z obdélníků, jehož y-ová souřadnice pravého horního rohu je nejmenší (pokud je takových více, zvolíme si libovolný z nich). Klíčové pozorování, na němž založíme své řešení, je:

Pokud můžeme tento obdélník přiřadit nějakému bodu, tak existuje optimální řešení, ve kterém je tento obdélník přiřazený nejpravějšímu z bodů, jež obsahuje.

Důkaz: Vezmeme libovolné optimální řešení. Označme si O náš obdélník a M množinu bodů, které leží uvnitř obdélníka O. Rozlišíme dva případy:

1. V řešení, které jsme zvolili, není O přiřazený žádnému bodu. Tehdy požadované optimální řešení dostaneme přiřazením nejpravějšího bodu z M obdélníku O. Obdélník, kterému byl tento bod doposud přiřazený, se uvolní.
2. Ve zvoleném řešení je obdélník O přiřazený nějakému jinému bodu $x \in M$. Pokud je nejpravější bod z M volný, stačí ho přiřadit obdélníku O místo bodu x. Jediná zajímavá situace nastane v okamžiku, kdy má nejpravější bod z M přiřazený nějaký jiný obdélník P. Všimněme si, že potom P musí obsahovat i bod x (P je totiž aspoň tak vysoký jako O a aspoň tak široký, aby obsahoval celou množinu M). Tehdy můžeme body přiřazené těmto dvěma obdélníkům vyměnit.

V obou případech jsme ukázali, že libovolné optimální řešení umíme upravit na stejně dobré (tedy nutně též optimální), které splňuje naše tvrzení. Tím je důkaz hotový.

Samotný algoritmus by již měl být jasný: Vždy najdeme „nejnižší“ obdélník a (pokud to jde) přiřadíme mu nejpravější z dosud nepřiřazených bodů, které v něm leží.

Přeloženo zpět do řeči příšer: vždy vezmeme svou nejslabší příšeru a pošleme ji na nejsilnější z příšer, nad kterou dokáže vyhrát.

Dobrá implementace: Přiřazování obdélníků bodům budeme, jak jsme popsali, dělat „hladově“. Abychom to dokázali provádět efektivně, budeme potřebovat datovou strukturu, které zvládne co nejrychleji provádět operace „přidej bod“ a „najdi a odstraň nejpravější bod menší nebo rovný x“. Pak postačí probírat obdélníky a body zleva doprava, pro každý obdélník do struktury přidat body, které se do tohoto obdélníku nově vešly, vybrat ze struktury nejpravější bod a přiřadit ho aktuálnímu obdélníku.

Existuje mnoho různých datových struktur, které dovedou obě tyto operace vykonávat v čase logaritmickém vzhledem k počtu vložených bodů. Klasickým příkladem jsou vyvažované binární stromy, ale existují i snáze naprogramovatelné možnosti. Například můžeme body nejdříve setřídit podle x-ové souřadnice a potom si v intervalovém stromu (který si uložíme do jednoho pole) pamatovat, které body právě v množině jsou.

Takové řešení má časovou složitost $O(N \cdot \log N)$ a paměťovou $O(N)$.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define MAXN 1000

struct Potvora {                        // Příšera, stvůra, nestvůra či jiná havěť
  int sila, obrana;
};
```

```
int N;                                   // Počet příšer
struct Potvora moje[MAXN], jeho[MAXN];  // Jejich parametry
int aktualne[4*MAXN];                    // Intervalový strom uložený do pole jako halda

// Porovnávací funkce pro qsort()
int srovnejObranu(const void * A, const void * B) {
  return ((struct Potvora *) A)->obrana - ((struct Potvora *) B)->obrana;
}
int srovnejSilu(const void * A, const void * B) {
  return ((struct Potvora *) A)->sila - ((struct Potvora *) B)->sila;
}

// Propagování změny v intervalovém stromu
void propaguj(int p) {
  aktualne[p] = (aktualne[p*2] > aktualne[2*p+1]) ? aktualne[p*2] : aktualne[p*2+1];
  if (p > 1) propaguj(p/2);
}

// Hledání v intervalovém stromu
int najdiNejvetsi(int p, int left, int right, int sila) {
  if (left >= N || jeho[left].obrana >= sila) return -1;
  if (right <= N && jeho[right].obrana < sila) return aktualne[p];
  int max = najdiNejvetsi(2*p+1, (left + right)/2 +1, right, sila);
  if (max >= 0)
    return max;
  else
    return najdiNejvetsi(2*p, left, (left + right)/2, sila);
}

int main(void) {
  // Načteme vstup
  scanf("%d", &N);
  for (int i=0; i<N; i++)
    scanf("%d/%d,", &moje[i].sila, &moje[i].obrana);
  for (int i=0; i<N; i++)
    scanf("%d/%d,", &jeho[i].sila, &jeho[i].obrana);

  // Setřídíme příšery
  qsort(moje, N, sizeof(struct Potvora), srovnejSilu);
  qsort(jeho, N, sizeof(struct Potvora), srovnejObranu);

  // Zaokrouhlíme počet na mocninu dvojky a inicializujeme strom
  int pos = 1;
  while (pos < N) pos *= 2;
  for (int i=0; i<2*pos; i++) aktualne[i] = -1;

  // A spočítáme výsledek
  int vyhraje = 0, kde = 0;
  for (int i=0; i<N; i++) {
    // Přidáme do aktuální množiny další příšery, které už moje i-tá přepere
    while (kde < N && jeho[kde].sila <= moje[i].obrana) {
      aktualne[pos + kde] = kde;
      propaguj((pos + kde++)/2);
    }
    // Najdeme nejsilnější z aktuálních příšer, která nás ještě nepřepere
    int max = najdiNejvetsi(1, 0, pos-1, moje[i].sila);
    if (max >= 0) {
      aktualne[pos + max] = -1;
      propaguj((pos + kde++)/2);
      vyhraje++;
    }
  }
  printf("%d\n", vyhraje);
  return 0;
}
```

P-III-2 Bürroland

Úlohu si můžeme zřejmým způsobem převést na orientovaný ohodnocený graf. Potvrzení budou vrcholy a hrana s ohodnocením k povede z vrcholu u do vrcholu v, pokud existuje úředník, který na základě potvrzení u a k osobních dokladů vydá potvrzení v. Posloupnost získávání potvrzení pak bude odpovídat cestě z vrcholu 1 do vrcholu N v tomto grafu (nevyplatí se nám získávat potvrzení, která nikdy nevyužijeme). Šířkou cesty nazveme maximum z ohodnocení hran ležících na cestě. Počet dokladů, které potřebujeme na získávání potvrzení po dané cestě, je zřejmě rovný šířce této cesty. Úkolem je tedy najít cestu s minimální šířkou.

Asi nejjednodušším řešením je zkoušet postupně všechny počty dokladů k od 0 do K. Pro každé k zjistíme, zda existuje cesta z vrcholu 1 do vrcholu N v grafu, který jsme omezili pouze na hrany s ohodnocením menším nebo rovným k. To umíme provést v čase $O(N + M)$ prohledáním do hloubky nebo do šířky. Nejmenší k, pro které cesta existuje, je výsledný počet potřebných dokladů. Tento postup můžeme dále zlepšit tím, že místo postupného zkoušení budeme k vyhledávat půlením intervalu. Tak dostaneme algoritmus s časovou složitostí $O((N + M) \cdot \log K)$.

Ukazuje se, že tato úloha je velmi podobná hledání nejkratší cesty z 1 do N. Pokud v algoritmu pro hledání nejkratší cesty změníme všechna sčítání na operaci maxima, dostaneme přesně řešení naší úlohy. Použijeme-li Floyd-Warshallův nebo Bellman-Fordův algoritmus (viz popis v řešeních domácího kola), dosáhneme složitosti $O(N^3)$, případně $O(N \cdot M)$.

Zastavíme se u řešení Dijkstrovým algoritmem. Existuje vícero implementací s různou časovou složitostí. My si ukážeme, že v našem případě se dá využít toho, že ohodnocení hran jsou malá přirozená čísla, a upravíme algoritmus tak, aby měl časovou složitost $O(K + N + M)$.

Pro každý vrchol v si budeme pamatovat zatím nejmenší nalezenou šířku cesty z vrcholu 1 do vrcholu v ($\texttt{sirka}[v]$) a předposlední vrchol na některé cestě této šířky (tzv. předchůdce v, $\texttt{pred}[v]$). Na začátku je šířka cesty do všech vrcholů „nekonečno“ (v našem případě postačí $K + 1$), kromě začátečního vrcholu, pro který je šířka nulová.

V každém kroku algoritmu vybereme nějaký vrchol u. Zjistíme, zda skrz tento vrchol nemůžeme zlepšit cestu (zmenšit šířku) do jeho sousedů. Pakliže z u vede hrana s ohodnocením k do vrcholu v, tak šířka této cesty do v přes u je $\max\{k, \texttt{sirka}[u]\}$. Pokud je $\texttt{sirka}[v]$ větší číslo, tak ho upravíme a nastavíme předchůdce $\texttt{pred}[v] \leftarrow u$.

Všimněte si, že v žádném kroku se šířka souseda vrcholu u nemůže upravit na číslo menší než $\texttt{sirka}[u]$. Proto můžeme v každém kroku za u zvolit vrchol, který má nejmenší šířku cesty do něj vedoucí a který jsme zatím takto nezpracovávali. To je totiž vrchol, kterému se šířka cesty už určitě nezmenší.

Když tedy budeme vždy za u volit nějaký dosud nezpracovaný vrchol, který má ze všech nezpracovaných vrcholů nejmenší šířku cesty, stačí nám každý vrchol zpracovat jednou.

V obecném případě by nalezení vrcholu s nejmenší šířkou byla poměrně náročná operace (museli bychom vždy projít všechny vrcholy nebo si je pamatovat v nějaké komplikovanější datové struktuře). Zde jsou ale všechny šířky malá celá čísla, takže si můžeme pro každou možnou šířku s pamatovat seznam vrcholů, do kterých má nejlepší (zatím známá) cesta šířku s.

Pro každou šířku budeme mít vrcholy uložené ve spojovém seznamu a navíc si budeme pro každý vrchol pamatovat ukazatel na místo, kde je právě uložený. Díky této informaci budeme umět v konstantním čase vymazat vrchol z jednoho seznamu a přidat ho na konec jiného. (To potřebujeme provést, kdykoliv se změní šířka pro daný vrchol.)

Seznamy budeme postupně procházet od šířky 0 po šířku K a budeme zpracovávat v nich uložené vrcholy. Takto budeme zpracovávat vždy nezpracovaný vrchol s nejmenší šířkou. Vzhledem k tomu, že vrcholy, jimž měníme šířku, nikdy nepřesouváme do seznamů, které jsme už prošli, nemusíme se nikdy k projitým seznamům vracet. (Všimněte si, že pokud do nějakého vrcholu nejdeme cestu s aktuálně zpracovávanou šířkou, zařadíme tento vrchol na konec aktuálního seznamu, tedy mezi dosud nezpracované vrcholy.)

Každý seznam, vrchol i hranu zpracujeme právě jednou, takže celková složitost algoritmu činí $O(K + N + M)$.

Implementační poznámka: Pro vypisování cesty je jednodušší obrátit hrany grafu a hledat cestu z vrcholu N do vrcholu 1, abychom pomocí předchůdců mohli cestu z 1 do N vypsat přímo, bez obracení.

```
program Buerroland;                     { welcome to reality }
const                                   { všechno má své meze }
  MAXN = 10000;
  MAXM = 1000000;
  MAXK = 10000;
type
  Hrana = record                        { hrana grafu }
    v: integer;                         { do kterého vrcholu vede }
    s: integer;                         { a její ohodnocení }
  end;
  PSeznam = ^TSeznam;                   { seznam vrcholů nebo hran }
  TSeznam = record
    h: integer;
    next: PSeznam;
    prev: PSeznam;
  end;
var
```

```
  graf: array[1..MAXN] of PSeznam;      { graf[i] je seznam čísel hran z vrcholu i }
  hrany: array[1..MAXM] of Hrana;       { informace o hranách }
  sirka: array[1..MAXN] of integer;     { šířka zatím nejužší cesty do vrcholu }
  pred: array[1..MAXN] of integer;      { předchůdce na zatím nejužší cestě }
  seznam: array[1..MAXK+2] of PSeznam;  { přihrádky podle šířek }
  it: array[1..MAXN] of PSeznam;        { it[i] je ukazatel na vrchol i v seznamu }

function pridej(var seznam: array of PSeznam; i,  h: integer): PSeznam;
var s: PSeznam;
begin
  new(s);
  s^.next := seznam[i];
  if seznam[i]<>nil then seznam[i]^.prev := s;
  s^.prev := nil;
  s^.h := h;
  seznam[i] := s;
  pridej := s;
end;

procedure odeber(var seznam: array of PSeznam; i: integer; p: PSeznam);
begin
  if p^.prev <> nil then p^.prev^.next := p^.next
    else seznam[i] := p^.next;
  if p^.next <> nil then p^.next^.prev := p^.prev;
  dispose(p);
end;

function max(a, b: integer): integer;
begin
  if a > b then max := a else max := b;
end;

procedure vypis(i: integer);
begin
  if i = 0 then
    write(i+1)
  else begin
    vypis(pred[i]);
    write(' ', i+1);
  end;
end;

var
  a, i, j, n, m, k, p, r, v: integer;
  s, z: PSeznam;
begin
  { Načteme vstup }
  read(n, m, k);
  for i := 1 to n do graf[i] := nil;
  for i := 1 to m do
  begin
    read(a, hrany[i].v, hrany[i].s);
    pridej(graf, a, i);
  end;

  { Inicializujeme šířky a nastrkáme vrcholy do seznamů }
  sirka[1] := 0;
  for i := 2 to n do sirka[i] := k+1;
  for i := 1 to k+2 do seznam[i] := nil;
  for i := 1 to n do it[i] := pridej(seznam, sirka[i], i);

  { Procházíme seznamy od nejmenší šířky po největší }
  for p := 0 to k do
  begin
    s := seznam[p];
```

```
    while s <> nil do
    begin
      { Pro každou vycházející hranu upravíme šířku cílového vrcholu }
      z := graf[s^.h];
      while z <> nil do
      begin
        v := hrany[z^.h].v;
        r := hrany[z^.h].s;
        if sirka[v] > max(r,sirka[s^.h]) then
        begin
          { Smažeme vrchol v ze seznamu, v němž se nachází }
          odeber(seznam, sirka[v], it[v]);
          { Upravíme šířku a vložíme do nového seznamu }
          sirka[v] := max(r,sirka[s^.h]);
          pred[v] := s^.h;
          it[v] := pridej(seznam, sirka[v], v);
        end;
        z := z^.next;
      end;
      s := s^.next;
    end;
  end;

  { Pokud jsme nenavštívili vrchol 0, má Jožin smůlu }
  if sirka[n] = k+1 then
    writeln('Potvrzeni nelze ziskat')
  else
  begin
    writeln(sirka[n]);
    vypis(n);
    writeln;
  end;
end.
```

P-III-3 Piškvorky

Nejdříve si hru trochu upravme. Jelikož nás zajímá jen to, zda Šebestová může vyhrát, zrušme remízy a dohodněme se, že i v případech, kdy by měla nastat remíza, vyhrává Mach. Nyní tedy každou partii někdo vyhraje, přičemž množina partií, které vyhraje Šebestová, se nezměnila.

Pozice ve hře nám jednoznačně popisuje stav hry. V obecném případě je to stav hrací plochy spolu s informací o tom, který z hráčů je na tahu. V piškvorkách si to umíme odvodit z počtů jednotlivých symbolů na hracím plánu, takže pozice pro nás bude znamenat totéž, co stav hracího plánu.

Koncová pozice je korektní pozice, ve které už hráč, který by měl táhnout, nemůže žádný tah udělat. V piškvorkách to tedy jsou pozice, v nichž právě někdo poprvé sestavil vyhrávající řadu, a navíc pozice, kde se celý hrací plán zaplnil bez vytvoření takové řady.

Všechny pozice ve hře můžeme rozdělit na *vyhrávající* a *prohrávající* následovně: Pozice je vyhrávající, pokud existuje postup, který hráčovi na tahu zaručí výhru bez ohledu na tahy druhého hráče. Ostatní pozice nazýváme prohrávající. Zadání úlohy tedy můžeme přeformulovat následovně: Je dána pozice, napište program pro paralelizátor, který rozhodne, zda je tato pozice vyhrávající.

Pro vyhrávající a prohrávající pozice zjevně platí následující skutečnosti:

- Pokud je hráč na tahu v prohrávající pozici, pak po libovolném možném tahu bude soupeř ve vyhrávající pozici.
  (Jinými slovy, pokud nám žádný tah nezaručuje výhru, znamená to, že bez ohledu na to, co uděláme, bude mít druhý hráč postup, který mu výhru zaručí.)
- Pokud je hráč na tahu ve vyhrávající pozici, existuje tah, po kterém bude jeho soupeř v prohrávající pozici.
  (Jinak řečeno, pokud by každý náš tah vedl do pozice, ve které si soupeř umí zajistit výhru, nemohla by naše pozice být vyhrávající.)

Tato dvě pozorování spolu se skutečností, že o koncových pozicích umíme říci, zda jsou vyhrávající nebo prohrávající (pro hráče na tahu), jednoznačně pro každou pozici určují, zda je vyhrávající nebo prohrávající. Lze to dokonce popsat jednoduchým rekurzivním algoritmem.

Abychom zjistili, zda je pozice vyhrávající:

1. Zkontrolujeme, zda to není koncová pozice. Pokud ano, podíváme se, kdo vyhrál, a podle toho odpovíme.
2. Vygenerujeme všechny možné tahy, které se v této pozici dají provést.

3. Pro každý z nich se na pozici, kterou dostaneme, rekurzivně zavoláme a zjistíme, zda je pro hráče na tahu prohrávající nebo vyhrávající.
4. Pokud je některá z prozkoumaných pozic prohrávající, je původní pozice vyhrávající, v opačném případě je původní pozice prohrávající.

Tento postup bychom na klasickém počítači snadno naprogramovali pomocí rekurzivní procedury. Jelikož v každém tahu ubude aspoň jedno volné políčko, rekurze se nezacyklí a v konečném čase vydá správný výsledek.

Totéž ještě jednou, jen jinými slovy: Jak zjistíme, že pozice, ve které je Šebestová na tahu, je vyhrávající? Jsou tři možnosti (vlastně se pak ukáže, že jen dvě):

1. Šebestová už vyhrála. Tato možnost nemůže nastat – poslední tah totiž byl Machův a jeho tahem Šebestová vyhrát nemohla.
2. Následujícím tahem může Šebestová vyhrát.
3. Existuje její tah, pro který platí: Ať v příštím tahu Mach potáhne libovolně, vždy dostane Šebestovou opět do vyhrávající pozice.

Toto již umíme přepsat do efektivního programu pro paralelizátor.

V řešení použijeme funkce **ForAll** a **Exists**, které jsme definovali v řešeních domácího kola. (Připomeňme si, že **ForAll**(c, N) paralelně spustí N kopií, ve kterých $c = 0, \ldots, N-1$, a úspěšně skončí, pokud všechny kopie úspěšně skončí. Funkce **Exists** funguje analogicky, jen stačí, aby úspěšně skončila libovolná jedna kopie.)

```
{ VSTUP: R,C,K : integer; A : array[0..R-1,0..C-1] of char; }

procedure Over;
var radekS, sloupecS, radekM, sloupecM : integer;
begin
   { pokud už nemůžeme nikam táhnout, Reject }
   if jePlnaPlocha then Reject;

   { vyzkoušíme všechny možné tahy Šebestové, stačí najít jeden dobrý }
   Exists(radekS, R);
   Exists(sloupecS, C);

   { ověříme, zda je to korektní tah }
   if A[radekS][sloupecS] <> '.' then Reject;
   A[radekS][sloupecS] := 'X';

   { pokud jsme tím právě vyrobili piškvorku, vyhráváme }
   if jePiskvorka then Accept;

   { pokud už Mach nemá žádný tah, nevyhráli jsme, smůla }
   if jePlnaPlocha then Reject;

   { prozkoumáme všechny možné Machovy tahy, po všech musí Šebestová vyhrát }
   ForAll(radekM, R);
   ForAll(sloupecM, C);

   { ignorujeme políčka, kam Mach nesmí táhnout }
   if A[radekM][sloupecM] <> '.' then Accept;
   A[radekM][sloupecM] := 'O';

   { rekurzivně ověříme, zda je výsledná pozice pro Šebestovou vyhrávající }
   Over;
end;
```

Zbývá doplnit, jak implementovat chybějící funkce `jePlnaPlocha` a `jePiskvorka`.

Pro první z nich nám stačí udržovat si v pomocné proměnné počet znaků na hracím plánu. Vždy, když potřebujeme vědět, zda je plocha plná, porovnáme tuto proměnnou s hodnotou $R \times C$.

Ověřovat, zda je na hracím plánu piškvorka (vyhrávající řada), stačí v osmi směrech od políčka, na které jsme umístili poslední značku. Zde se ale vyplatí trochu přemýšlet: Pokud bychom ověřování dělali „klasicky“ postupně, budeme na to potřebovat $O(K)$ kroků. To se dá zlepšit pomocí metody Rozděl a panuj. Trik bude podobný jako hledání cesty v úloze krajského kola. Pokud chceme ověřit, zda je na plánu piškvorka začínající na $[x, y]$ a končící na $[x + K \cdot s_x, y + K \cdot s_y]$, nejdříve se podíváme, zda je na $[x + (K/2) \cdot s_x, y + (K/2) \cdot s_y]$ správný znak a pokud ano, paralelně zkontrolujeme, zda oba poloviční úseky tvoří piškvorku přibližně poloviční délky. Takto tedy dovedeme ověřit, zda na plánu máme piškvorku, v čase $O(\log K)$.

Celková časová složitost jednoho vykonání funkce `Over` je $O(\log R + \log C + \log K)$. Volat sama sebe bude nejvýše $(RC/2)$-krát, proto výsledná časová složitost programu je $O(RC \cdot (\log R + \log C + \log K))$.

(Po krátké úvaze toto upravíme na $O(RC \cdot (\log R + \log C))$, protože je-li K větší než oba rozměry hracího plánu, můžeme rovnou na začátku vstup odmítnout.)

Úmyslně jsme ale nepředvedli podrobnou implementaci výše uvedeného řešení. Ukážeme si ještě jedno, které stejné časové složitosti dosáhne daleko jednodušeji.

Budeme střídavě generovat tahy Šebestové („existuje tah Š. takový, že …“) a Macha („… že pro všechny tahy M. …“) stejně jako v předcházejícím řešení. Ale jediné, co budeme kontrolovat, bude, zda je to tah na prázdné políčko.

Ale co s kontrolou piškvorky? Tu si necháme na konec. Prostě si v každé iteraci funkce `Over` pomocí jednoho volání **Some** „tipneme“, zda právě Šebestová vyhrála. Pokud jsme si tipli, že ne, simulujeme následující tah každého z hráčů. Pokud jsme si tipli, že ano, ověříme, zda opravdu posledním tahem Šebestová vyhrála (tedy zda má pískvorku a zda všechny piškvorky na hrací ploše vznikly jejím posledním tahem). Toto ověření už můžeme udělat „klasicky“, složitost nám to nepokazí.

Proč to funguje? Nejdříve ukážeme, že pro vyhrávající pozice náš program skončí úspěšně. Vždy, když je na tahu Šebestová, podíváme se na tu větev programu, která odpovídá jejímu tahu podle vyhrávající strategie. Bez ohledu na to, jak bude táhnout Mach (tedy co vygenerují naše volání **ForAll**), dostaneme se při následujícím volání `Over` opět do pozice, která je pro Šebestovou vyhrávající. A takto pokračujeme dál, až dokud se nedostaneme do situace, ve které už Šebestová vyhraje. V tom okamžiku ale úspěšně skončí větev, ve které ověřujeme úspěšný konec hry. A jsme tam, kde jsme chtěli být.

Naopak, pokud vyhrávající strategie pro Šebestovou neexistuje, některé větve výpočtu (kopie původního programu) se dostanou do situace, kdy vyhrál Mach. Tady nám ale už nic nepomůže, protože kontrola hracího plánu se už určitě k volání **Accept** nedostane.

(Kdybychom chtěli být úplně korektní, předchozí úvahu bychom dokazovali matematickou indukcí. Například indukcí podle ℓ bychom dokázali tvrzení: Nechť spustíme náš program na vstup, ve kterém je ℓ volných políček na hracím plánu, v pozici, která je pro Šebestovou prohrávající. Potom mezi $R \times C$ kopiemi, které vzniknou voláním **Exists**, žádná neskončí úspěšně. Důkaz indukčního kroku by vypadal tak, že ukážeme, že ani ověření konce hry, ani zkoušení všech Machových tahů nevede k úspěšnému konci. To první proto, že Šebestová přeci nevyhrála, to druhé pak proto, že Mach má vyhrávající tah, a ten nás dovede do pozice, pro kterou platí indukční předpoklad, a proto tato kopie neskončí úspěšně.)

A teď už konečně program:

```
{ VSTUP: R,C,K : integer; A : array[0..R-1,0..C-1] of char; }

var zbyvaTahu : integer; { globální počítadlo tahů do konce hry }

{ Funkce jeKonec vrací true právě tehdy, když v aktuální pozici Šebestová vyhrála. }
{ Víme, že pozice je korektní a poslední tah byl [lastr,lastc]. }
{ Implementaci ponecháme na čtenáři :) }
function jeKonec(lastr, lastc : integer) : boolean;
begin
   { ověříme, že přes [lastr,lastc] leží piškvorka }
   { smažeme znak 'X' z [lastr,lastc] }
   { ověříme, že na hrací ploše nezůstala žádná piškvorka }
end;

{ Procedura Over ověří, zda je aktuální pozice pro Šebestovou vyhrávající. }
procedure Over;
var radekS, sloupecS, radekM, sloupecM, pom : integer;
begin
   { pokud už nemáme tah, prohráváme }
   if zbyvaTahu=0 then Reject;
   Dec(zbyvaTahu);

   { zkoušíme všechny možné tahy Šebestové, stačí najít jeden dobrý }
   Exists(radekS, R);
   Exists(sloupecS, C);

   { ověříme, zda je to korektní tah }
   if A[radekS][sloupecS] <> '.' then Reject;
   A[radekS][sloupecS] := 'X';

   { můžeme se právě rozhodnout, že jdeme kontrolovat }
   Some(pom);
   if (pom=1) and jeKonec(radekS,sloupecS) then Accept;
```

```
   { pokud už Mach nemá žádný tah, nevyhráli jsme, smůla }
   if zbyvaTahu=0 then Reject;
   Dec(zbyvaTahu);

   { prozkoumáme všechny možné Machovy tahy, po všech musí Šebestová vyhrát }
   ForAll(radekM, R);
   ForAll(sloupecM, C);

   { ignorujeme políčka, kam Mach nesmí táhnout }
   if A[radekM][sloupecM] <> '.' then Accept;
   A[radekM][sloupecM] := 'O';

   { rekurzivně ověříme, zda je výsledná pozice pro Šebestovou dobrá }
   Over;
end;

{ hlavní program: jen nastavíme počítadlo tahů a jdeme rekurzivně ověřovat, zda Š. může vyhrát }
var i,j : integer;
begin
   zbyvaTahu := 0;
   for i := 0 to R-1 do
      for j := 0 to C-1 do
         if A[i][j] = '.' then Inc(zbyvaTahu);
   Over;
end.
```

P-III-4 Násobek

Označme si C množinu povolených číslic a N zadané číslo. Naší úlohou je najít nejmenší kladný násobek čísla N, ve kterém jsou použité jen číslice z C.

Zamysleme se nejprve nad jednodušší úlohou – jak zjistit, zda má zadaná úloha vůbec řešení?

Buď P množina všech kladných čísel, která se dají poskládat z cifer v C. Zjistíme, jaké zbytky dávají čísla z P při dělení N. Pokud bude mezi těmito zbytky i nula, úloha má řešení, pokud nebude, řešení nemá (žádný násobek N nemá požadovaný tvar).

Všimněme si jednoho zajímavého způsobu, jak můžeme definovat naši množinu přípustných čísel P:

- Jednociferná přípustná čísla jsou právě všechny nenulové číslice z C.
- Pokud je $p \in P$ a $c \in C$, tak $10p + c \in P$.
- Žádná jiná čísla v P nejsou.

Jinými slovy, všechna k-ciferná přípustná čísla umíme vygenerovat tak, že vezmeme všechna $(k-1)$-ciferná přípustná čísla a na konec jim připíšeme ještě jednu povolenou číslici.

Všimněme si teď, co se stane, máme-li dvě přípustná čísla $p_1, p_2 \in P$, která dávají po dělení N stejný zbytek z. Pokud za každé z nich připíšeme číslici c, dostaneme dvě nová přípustná čísla a opět obě budou dávat stejný zbytek po dělení N. (Tento zbytek bude $(10z + c) \bmod N$.)

Nyní už máme dost informací na to, abychom dovedli najít množinu Z zbytků, které dávají čísla z P po dělení N. Budeme výše uvedeným způsobem postupně generovat čísla z P. Vždy, když nějaké vygenerujeme, podíváme se, zda jsme dostali nový zbytek. Pokud ano, číslo si uchováme na další zpracování, pokud ne, zahodíme ho. (Všechny zbytky, které umíme vyrobit z tohoto čísla, umíme vyrobit i z toho, které dalo tento zbytek jako první.) Jelikož zbytků je jen konečně mnoho, jednou skončíme.

V tomto okamžiku už umíme rozhodnout, zda pro daný vstup existuje řešení. Po chvíli přemýšlení přijdeme i na to, že pokud jsme čísla z P generovali v rostoucím pořadí, tak v okamžiku, kdy jsme dosáhli zbytku 0, jsme ho dosáhli nejmenším možným číslem.

Pro zkušenější řešitele dodáváme, že výše uvedený postup odpovídá prohledávání do šířky v grafu, jehož vrcholy jsou zbytky po dělení N a každá hrana odpovídá přidání číslice, kteroužto číslicí si ji také označíme. V tomto grafu nyní najdeme nejkratší cestu z některého vrcholu odpovídajícímu jednocifernému číslu do vrcholu 0. Hrany vycházející z vrcholu vždy zpracováváme v rostoucím pořadí podle přidávané číslice. Hledané číslo může být velmi dlouhé, proto si pro každý zbytek pamatujeme jen to, ze kterého zbytku a přidáním které číslice jsme ho poprvé vytvořili. Pokud se nám podaří vytvořit zbytek 0, z těchto informací zpětně sestrojíme hledané číslo.

Časová i paměťová složitost tohoto řešení je $O(N)$.

P-III-5 Stránka

Máme před sebou vlastně dvě samostatné úlohy. Tou první je porovnávání slov na stránce s vyhledávanými slovy. Potřebujeme co nejrychleji zjišťovat, kde se na stránce které vyhledávané slovo nachází.

Očíslujme si vyhledávaná slova od 1 do N. Text stránky převedeme na posloupnost čísel: místo vyhledávaného slova napíšeme jeho číslo, místo slova, které nás nezajímá, napíšeme nulu. (Pro příklad ze zadání dostaneme posloupnost 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0.)

Úseky stránky, které obsahují všechna vyhledávaná slova, nazveme *dobré.* (Každý dobrý úsek odpovídá v naší posloupnosti úseku, který aspoň jednou obsahuje každé z čísel 1 až N.)

Dobrý úsek, který už nemůžeme ani na jednom konci zkrátit, budeme nazývat *minimální.* Námi hledaný úsek je určitě minimální. Minimálních úseků ale může být i víc a všechny nemusí být stejně dlouhé. V našem příkladu jeden minimální úsek tvoří slova 3 až 8, druhý tvoří slova 7 až 18.

Naše řešení najde všechny minimální úseky a vybere z nich ten nejkratší.

Jak na to? Postupně pro každé slovo textu stránky zjistíme, zda tam začíná nějaký minimální úsek, a pokud ano, kde končí. Nahlédněme, že pro každé dva minimální úseky platí, že ten, který později začíná, také později končí. Proto když posouváme doprava začátek hledaného minimálního úseku, bude se i jeho konec posouvat jen doprava.

Abychom uměli rychle určit, zda je právě zkoumaný úsek dobrý, budeme si pamatovat následující informace: `pocet`$[i]$ bude říkat, kolikrát se vyhledávané slovo i nachází ve zkoumaném úseku. Mimo to, `mame` bude počet vyhledávaných slov, která se vyskytují v aktuálním úseku aspoň jednou.

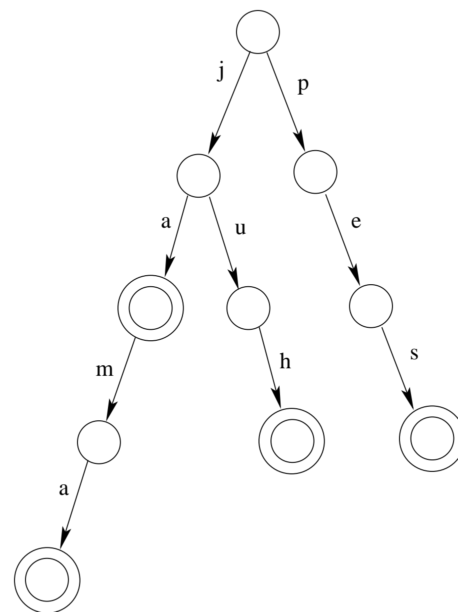
Když teď posuneme některý konec zkoumaného úseku o jedno slovo, změní se nám nejvýše jedna hodnota `pocet`$[i]$ a na základě toho se případně (pokud jsme právě vynechali poslední výskyt některého slova nebo přidali slovo, které ještě v úseku nebylo) změní hodnota `mame` o 1.

Tím už máme tuto část úlohy vyřešenu. Začneme s úsekem, který tvoří jen první slovo textu stránky. V každém kroku se pak podíváme, zda je aktuální úsek dobrý. Pokud ano, vynecháme z něj jeho první slovo, pokud ne, přidáme k němu následující slovo textu.

V programu to může vypadat následovně:

```
void nejkratsi_usek(int cisla[], int delky[], int *zacatek, int *konec)
{
  int nejlepsi = 987654321;
  int pocet[N+1] = { 0, };
  int mame = 0;
  int z = 0, k = 0, delka = -1;

  *zacatek = 0, *konec = 0;
  for (;;) {
    if (mame == N) {
      if (z == M)
        break;
      delka -= delky[z] + 1;
      pocet[cisla[z]]--;
      if (cisla[z] && pocet[cisla[z]] == 0)
        mame--;
      z++;
    } else {
      if (k == M)
        break;
      delka += delky[k] + 1;
      pocet[cisla[k]]++;
      if (cisla[k] && pocet[cisla[k]] == 1)
        mame++;
      k++;
    }
    if (mame == N && delka < nejlepsi)
      *zacatek = z, *konec = k, nejlepsi = delka;
  }
}
```



Písmenkový strom pro slova `ja`, `jama`, `juh`, `pes`.

Nyní se vraťme k první části úlohy: Jak efektivně přepsat slova textu stránky na čísla?

Jedno možné efektivní řešení je použít datovou strukturu zvanou *písmenkový strom* (anglicky *trie*). To je zakořeněný strom, ve kterém každý vrchol má nejvýše 26 synů a hrany do synů jsou označeny různými písmenky (od `a` do `z`). Každá cesta z kořene dolů odpovídá slovu, které si „přečteme“ na hranách, po kterých jdeme.

Písmenkový strom se dá použít k uložení množiny slov: Vytvoříme všechny vrcholy, které jsou třeba na to, abychom si mohli „přečíst“ každé z našich slov, a následně označíme ty vrcholy, v nichž některé ze slov končí. Například si k vrcholu můžeme poznamenat číslo dotyčného slova.

K vyřešení naší úlohy nám tedy stačí vytvořit písmenkový strom pro hledaná slova. Nyní pro každé slovo na stránce snadno zjistíme, zda je ve stromě uložené, a pokud ano, rovnou se dozvíme i jeho číslo.

Hledání slov má časovou složitost $O(\ell_V + \ell_S)$, kde ℓ_V je součet délek všech vyhledávaných slov a ℓ_S součet délek slov tvořících text stránky (při stavění stromu i při vyhledávání spotřebujeme konstantní čas na zpracování každého písmene). Vyhledání minimálních úseků trvá $O(N + M)$, ale jelikož $N \leq \ell_V$ a $M \leq \ell_S$, můžeme celkovou časovou složitost odhadnout také výrazem $O(\ell_V + \ell_S)$. Pokud si označíme délku nejdelšího slova L, lze totéž vyjádřit jako $O((N + M) \cdot L)$. Paměťová složitost je rovna časové.

Jiná možnost je použít místo písmenkového stromu hashování. Tehdy dosáhneme v průměrném případě asymptoticky stejné časové složitosti a pro velké slovníky i lepších multiplikativních konstant „schovaných do O-čka“.