Ramseyovy věty

Martin Mareš

Tento text je stručným shrnutím těch tvrzení Ramseyovy teorie, která zazněla na mé letošní přednášce z Kombinatoriky a grafů I. Předpokládá, že čtenář se již seznámil se základní Ramseyovou větou, třeba v Kapitolách z diskrétní matematiky, a doplňuje několik silnějších ramseyovských tvrzení.

Používaná notace také vychází z Kapitol, navíc používáme používáme symbol $[n]$ pro množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Grafová Ramseyova věta

Sejde-li se 6 lidí na večírku, určitě se nějací 3 z nich navzájem znají, nebo naopak existuje trojice lidí, z nichž žádní dva se neznají. To není náhoda, nýbrž speciální případ následující věty:

Věta: *(Ramseyova pro grafy)* Pro každé k, ℓ existuje N takové, že kterýkoliv graf na alespoň N vrcholech obsahuje kliku (úplný podgraf) velikosti k nebo nezávislou množinu velikosti ℓ.

Důkaz: Viz Kapitoly. ♡

Definice: Nejmenšímu takovému N pro dané k a ℓ se říká *Ramseyovo číslo* a značí se $R(k, \ell)$.

Známo je jen několik přesných hodnot Ramseyových čísel:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	…
1	1	1	1	1	1	1	…
2	1	2	3	4	5	6	…
3	1	3	6	9	14	18	
4	1	4	9	18	25		
5	1	5	14	25			
6	1	6	18				
⋮	⋮	⋮					

Případy $k \leq 2$ a $\ell \leq 2$ jsou triviální, $R(3, 3) = 6$ odpovídá příkladu s večírkem, $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$ se dá ještě získat ručním rozborem případů. Všechny ostatní hodnoty byly získány zdlouhavými výpočty na počítačích. A například o $R(5, 5)$ se dosud ví jen to, že leží v intervalu $[43, 49]$.

Z důkazu Ramseyovy věty v Kapitolách plyne rekurence $R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell - 1)$, z níž dostáváme

$$R(k, \ell) \leq \binom{k + \ell - 2}{k - 1} \leq 2^{k+\ell-2}.$$

To ve srovnání s naší tabulkou skutečných hodnot Ramseyových čísel vypadá jako velmi nadsazený odhad. Můžeme ovšem dokázat, že „diagonální“ Ramseyova čísla $R(k, k)$ rostou exponenciálně:

Věta: $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Důkaz: Pravděpodobnostní metodou. Viz Kapitoly. ♡

Vícebarevná Ramseyova věta

Grafovou Ramseyovu větu si můžeme vyložit také tak, že obarvíme-li hrany dost velkého úplného grafu dvěma barvami, pak v grafu vždy najdeme jednobarevný úplný podgraf zadané velikosti. Obdobné tvrzení platí i pro více barev:

Věta: *(Ramseyova vícebarevná)* Pro každé t a k existuje N takové, že pro každou funkci $c : \binom{[n]}{2} \to [t]$, $n \geq N$ existuje množina $A \in \binom{[n]}{k}$, pro níž je funkce c na $\binom{A}{2}$ konstantní.

Co to znamená?

- t udává, kolik barev používáme
- k předepisuje, jak velkou kliku si přejeme najít
- N říká, jak velký graf je už „dost velký"
- n je počet vrcholů grafu, který se chystáme obarvit
- $[n] = \{1, \ldots, n\}$ očíslujeme vrcholy tohoto grafu
- c je obarvení hran grafu t barvami
- A je k-tice vrcholů, která indukuje jednobarevnou kliku

Mimochodem, tato věta je velmi podobná principu holubníku, řečenému též Dirichletův. V něm ovšem nebarvíme hrany, nýbrž vrcholy samotné:

Věta: *(princip holubníku)* Pro každé t a k existuje N takové, že pro každou funkci $c : [n] \to [t]$, $n \geq N$ existuje množina $A \in \binom{[n]}{k}$, na níž je funkce c konstantní.

Důkaz: Stačí zvolit $N = t(k-1) + 1$. ♡

Větu bude snazší dokázat nejprve pro nekonečné grafy. (Nám budou stačit spočetně nekonečné, tedy ty, jejichž vrcholy jdou očíslovat přirozenými čísly.) Začneme odpovídajícím principem holubníku.

Věta: *(nekonečný princip holubníku)* Pro každé t a každou funkci $c : \mathbb{N} \to [t]$ existuje nekonečná množina $A \subseteq \mathbb{N}$, na níž je funkce c konstantní.

Důkaz: Rozdělme množinu přirozených čísel na ekvivalenční třídy $B_1, \ldots, B_t$ podle barev prvků. Jelikož sjednocením všech B_i je nekonečná množina, musí být alespoň jedna z B_i také nekonečná. ♡

Věta: *(nekonečná Ramseyova)* Pro každé t a každou funkci $c : \binom{\mathbb{N}}{2} \to [t]$ existuje nekonečná množina $A \subseteq \mathbb{N}$, pro níž je funkce c na $\binom{A}{2}$ konstantní.

Důkaz: Sestrojíme posloupnost nekonečných množin $A_1, A_2, \ldots$ Položíme $A_1 = \mathbb{N}$ a budeme opakovat následující krok pro $i = 1, 2, \ldots$:

Zvolíme $v_i \in A_i$ libovolně.⟨1⟩ Rozdělíme vrcholy v množině $A'_i = A_i \setminus \{v_i\}$ do ekvivalenčních tříd $B_i^1, \ldots, B_i^t$ podle toho, jakou barvu má hrana, která je spojuje s v_i. Jelikož množina A'_i je nekonečná, musí být alespoň jedna třída také nekonečná. Nechť je to B_i^j. Položme $b_i = j$ a $A_{i+1} = B_i^j$ a pokračujme dalším krokem.

⟨1⟩ Kdybyste se rozpakovali jen tak vybírat z nekonečné množiny libovolný prvek, můžete vybrat například nejmenší prvek množiny. Jelikož zacházíme jen s přirozenými čísly, vždy existuje.

Nyní si všimneme, že posloupnost vybraných vrcholů $v_1, v_2, \ldots$ má tu zajímavou vlastnost, že kdykoliv $i < j$, hrana $\{v_i, v_j\}$ má barvu b_i. Její barva tedy záleží jen na v_i, nikoliv na v_j.

V nekonečné posloupnosti vybraných barev $b_1, b_2, \ldots$ je ovšem pouze konečně mnoho hodnot, takže některa z nich se musí nekonečněkrát opakovat. Označme tuto barvu b a její výskyty $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots$ Z pozorování v minulém odstavci plyne, že všechny hrany mezi vrcholy $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots$ musí mít barvu b. Tyto vrcholy tedy indukují hledanou nekonečnou jednobarevnou kliku. ♡

Nyní tuto úvahu upravíme, abychom dokázali i konečnou verzi věty:

Důkaz: (konečné verze) Postupujme v předchozím důkazu od konce. Potřebujeme zajistit, aby vybraná podposloupnost obsahovala k vrcholů. Z principu holubníku víme, že k tomu stačí zaručit, aby posloupnost, ze které vybíráme, obsahovala alespoň tk prvků (neboť v ní je nejvýše t různých hodnot).

Nyní upravme konstrukci množin $A_1, A_2, \ldots$. Stejně jako předtím vždy z množiny A_i vybereme vrchol v_i a zbývající vrcholy rozdělíme na ekvivalenční třídy. Za A_{i+1} pak zvolíme největší z tříd. Proto platí $|A_{i+1}| \geq (|A_i| - 1)/t$.

Potřebujeme zařídit, aby konstrukce běžela alespoň tk kroků, čili aby bylo $|A_{tk}| \geq 1$. To nastane, pokud $|A_{tk-1}| \geq t + 1$, $|A_{tk-2}| \geq t^2 + t + 1$, $\ldots$, $|A_1| \geq \sum_{i=0}^{tk} t^i = (t^{tk+1} - 1)/(t - 1)$.

Stačí tedy zvolit $N = t^{tk+1}$. Tím zaručíme, že konstrukce pokaždé vytvoří dostatečně dlouhou posloupnost, abychom z ní dostali jednobarevnou kliku na k vrcholech. ♡

Ramseyova věta pro p-tice

Princip holubníku popisuje situaci při barvení jednotlivých prvků, Ramseyova věta říká, co se stane, když místo toho barvíme dvojice prvků (hrany úplného grafu). Jejich tvrzení lze zobecnit na barvení obecných p-tic prvků:

Věta: *(Ramseyova pro p-tice)* Pro každé p, t a k existuje N takové, že pro každou funkci $c : \binom{[n]}{p} \to [t]$, $n \geq N$ existuje množina $A \in \binom{[n]}{k}$, pro níž je funkce c na $\binom{A}{p}$ konstantní.

Dokážeme opět nejprve nekonečnou verzi:

Věta: *(nekonečná Ramseyova pro p-tice)* Pro každé p a t a každou funkci $c : \binom{\mathbb{N}}{p} \to [t]$ existuje nekonečná množina $A \subseteq \mathbb{N}$, pro níž je funkce c na $\binom{A}{p}$ konstantní.

Důkaz: Budeme postupovat indukcí podle p. Pro $p \leq 2$ jsme větu již dokázali. Indukční krok bude obdobný důkazu nekonečné Ramseyovy věty pro dvojice, jen v něm místo principu holubníku bude figurovat Ramseyova věta pro $(p-1)$-tice.

Opět budeme konstruovat množiny $A_1, A_2, \ldots$: máme-li již sestrojenu množinu A_i, vybereme vrchol $v_i \in A_i$, ale tentokrát budeme vrcholy v $A'_i = A_i \setminus \{v_i\}$ rozdělovat do ekvivalenčních tříd jiným způsobem.

Zvolíme funkci c'_i, která bude barvit $(p-1)$-tice z množiny A'_i, a to tak, že $(p-1)$-tici Q přiřadí barvu $c(Q \cup \{v_i\})$. Jinými slovy rozšíří Q na p-tici přidáním prvku v_i a zeptá se původního obarvení c.

Nyní použijeme větu pro $(p-1)$-tice na množinu A'_i s obarvením c'_i. Podle ní existuje nějaká nekonečná podmnožina $B_i \subseteq A'_i$, na jejíchž $(p-1)$-ticích je obarvení c'_i konstantní. Tuto podmnožinu zvolíme za další A_{i+1} a barvu příslušných $(p-1)$-tic označíme b_i.

I tentokrát necháme konstrukci běžet tak dlouho, až vznikne nekonečná posloupnost $v_1, v_2, \ldots$ vybraných vrcholů. Podobně jako minule platí, že barva p-tice $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p}\}$, kde $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, závisí pouze na volbě vrcholu v_{i_1}.

Zbývá z barev $b_1, b_2, \ldots$ vybrat nějakou, která se vyskytuje nekonečněkrát, a získat tak nekonečnou podposloupnost vrcholů, na níž mají všechny p-tice stejnou barvu. ♡

Cvičení: Rozmyslete si, že tento indukční krok funguje i pro $p = 2$ a že se v něm děje totéž, jako v původním důkazu věty pro dvojice.

Nyní dokážeme konečnou verzi věty. Mohli bychom sice opět upravovat „nekonečný“ důkaz, ale odhady potřebných velikostí množin by vyšly poněkud „chlupatě“.⟨2⟩ Místo toho rovnou dokážeme, že z tvrzení pro nekonečné množiny plyne jeho konečná verze. Použitý trik funguje i u dalších kombinatorických vět a ve skutečnosti je mnohem obecnější – souvisí s principem kompaktnosti ve výrokové logice.

Důkaz: (konečné Ramseyovy věty pro p-tice)

Zvolme pevně p, k a t z předpokladů věty.

Uvažme nějaké obarvení c množiny $\binom{[n]}{p}$. Budeme mu říkat *dobré,* pokud existuje nějaká „jednobarevná“ k-prvková podmnožina, tedy taková, jejíž všechny p-tice mají stejnou barvu. Pokud jednobarevná podmnožina neexistuje, obarvení je *špatné.*

Věta tedy tvrdí, že pro dost velké n jsou všechna obarvení dobrá. Budeme předpokládat, že tomu tak není, a dostaneme se do sporu s nekonečnou verzí věty: sestrojíme špatné obarvení množiny všech přirozených čísel.

Pro každé n označme S_n množinu všech špatných obarvení množiny $\binom{[n]}{p}$. Pokud dokazované tvrzení neplatí, je nekonečně mnoho množin S_n neprázdných. Nahlédneme, že dokonce musí být neprázdné všechny: každé špatné obarvení $c \in S_n$ můžeme zúžit na špatné obarvení $z(c) \in S_{n-1}$ tím, že „zapomeneme“ p-tice obsahující prvek n. Tím pádem kdykoliv je S_n neprázdná, jsou neprázdné i všechny S_i pro $i < n$.

Strukturu špatných obarvení můžeme popsat stromem. V jeho kořeni bude jediné obarvení z S_0 (pro $n = 0$ žádné p-tice neexistují, takže je to prázdné obarvení), na n-té hladině pak budou ležet všechna obarvení z S_n. Z každého obarvení c povede hrana o hladinu výš do jeho zúžení $z(c)$. Jelikož všechny S_n jsou neprázdné, strom má nekonečně mnoho hladin, a tím pádem i nekonečně mnoho vrcholů. Na každé hladině jich ovšem leží jen konečně mnoho.

Nyní v tomto stromu sestrojíme nekonečnou cestu $c_0, c_1, \ldots$ (vždy $c_n \in S_n$). Budeme ji vytvářet postupně a stále dodržovat invariant, že z aktuálního vrcholu se lze dostat cestou do nekonečně mnoha vrcholů na nižších hladinách. Za c_0 zvolíme

⟨2⟩ Přesto to můžete zkusit a získat konkrétní odhad pro p-ticová Ramseyova čísla.

kořen stromu (z něj jsou dosažitelné všechny vrcholy). Známe-li už c_{n-1}, podíváme se na jeho syny. Všechny vrcholy dosažitelné z c_{n-1} jsou dosažitelné i z některého z jeho synů, takže musí existovat syn, z nějž je dosažitelných nekonečně mnoho vrcholů. Prohlašme ho za c_n a pokračujme v konstrukci.

Nalezená cesta nám dává návod, jak sestrojit špatné obarvení p-tic všech přirozených čísel. Máme-li p-tici $Q = \{x_1, \ldots, x_p\}$, najdeme její největší prvek q a p-tici obarvíme podle c_q (nebo podle libovolného pozdějšího obarvení, neboť ta jsou rozšířeními c_q). Proč je toto obarvení špatné? Kdyby v něm existovala nějaká jednobarevná podmnožina $\{x_1, \ldots, x_k\}$, kde $x_1 < \ldots < x_k$, pak by tato podmnožina byla jednobarevná i v obarvení c_{x_k}, což ovšem není možné, protože každé takové obarvení je špatné. ♡